ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7η ΔΕΚΑΔΑ

61.

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt = x-1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Για δυνατούς παίκτες

i) Δείξτε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x$

ii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την f^{-1}

iii) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πρόσημο των τιμών της f

v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e + 1$

vi) Να δείξετε ότι, για κάθε $x > 1$ ισχύει $(x-1)\cdot f'(x) < f(x) < \frac{x-1}{2}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt = x-1 \Rightarrow \left[e^t+t\right]_0^{f(x)} = x-1$$

$$e^{f(x)} + f(x) - 1 = x-1$$

$$e^{f(x)} + f(x) = x \qquad \textbf{(1)}$$

ii)

$$(1) \Rightarrow \left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = x' \Rightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1$$

$$f'(x)(e^{f(x)} + 1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}+1} > 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως "1 – 1", οπότε αντιστρέφεται.
Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο τιμών της f (δηλαδή το π.ορισμού της f^{-1}) είναι το $\mathbb{R}$
Έστω τυχαίο $y\in\mathbb{R}$. (Άρα για κάθε $y\in\mathbb{R}$).
Αναζητάμε λύση της εξίσωσης $y = f(x)$ **(3)**, ως προς x.

Η ισότητα $e^{f(x)} + f(x) = x \overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^y + y = x$.
Δηλαδή η λύση της (3), που αναζητάμε, είναι η $x = e^y + y$
Και επομένως, με εναλλαγή των μεταβλητών, $f^{-1}(x) = e^x + x$ **(4)**

iii)

$$(2) \Rightarrow f''(x) = \frac{-e^{f(x)}f'(x)}{(e^{f(x)}+1)^2} < 0$$ αφού $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

iv)

Για $f(x) = 0$ η υπόθεση δίνει $\int_0^0(e^t+1)dt = x-1 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x = 1$

και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Πρόσημο : Όταν $x < 1$, αφού f γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f(x) < f(1) = 0$

Όταν $x > 1$, αφού f γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f(x) > f(1) = 0$

v)

Για κάθε $x \in [1,\ 1+e]$, από (iv) έχουμε $f(x) \geq 0$, άρα $E = \int_1^{1+e} f(x)dx$

Θέτουμε $f(x) = u$, άρα $x = f^{-1}(u) = e^u + u$ και $dx = (e^u + 1)du$

Νέα άκρα ολοκλήρωσης : Όταν $x = 1$, τότε $u = f(1) = 0$

Όταν $x = e + 1$, τότε $u = f(e + 1)$

Η (4) για $x = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = e + 1$

οπότε $u = f(f^{-1}(1)) = 1$

Άρα
$$E = \int_1^{1+e} f(x)dx = \int_0^1 u(e^u + 1)du$$
$$= \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 u du$$
$$= \int_0^1 u(e^u)' du + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \left[ue^u\right]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \left[ue^u\right]_0^1 - \left[e^u\right]_0^1 + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$ τετραγωνικές μονάδες

vi)

Αρκεί να αποδείξουμε $f'(x) < \dfrac{f(x) - 0}{x - 1} < \dfrac{1}{2}$

$f'(x) < \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} < \dfrac{1}{2}$

Δημιουργούμε το κλάσμα του Θ.Μ.Τ

Στο διάστημα $[1,\ x]$ η f είναι παραγωγίσιμη , άρα ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ

Άρα υπάρχει $\xi \in (1,\ x)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Οπότε , αρκεί να αποδείξουμε $f'(x) < f'(\xi) < \dfrac{1}{2}$

Είναι $f''(x) < 0$, άρα f' γνησίως φθίνουσα , και αφού $1 < \xi < x \Rightarrow$

$f'(1) > f'(\xi) > f'(x)$

Αλλά , από τη (2) είναι $f'(1) = \dfrac{1}{e^{f(1)} + 1} = \dfrac{1}{e^0 + 1} = \dfrac{1}{2}$

Οπότε $\dfrac{1}{2} > \dfrac{f(x)}{x - 1} > f'(x)$

62.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη για την οποία ισχύει
$$f^2(0) + f^2(1) + 13 = 6f(0) + 4f(1).$$
Δείξτε ότι

i) $f(0) = 3$ και $f(1) = 2$

ii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα

iii) Υπάρχει ένα μόνο $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(x_1)}{x_1} = 3$

iv) Υπάρχει ένα μόνο $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $5f(x_2) = 3f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

v) Η f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f\left(f^{-1}(x^2 - 3x + 4) - 1\right) > 3$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$f^2(0) + f^2(1) + 13 = 6f(0) + 4f(1) \Leftrightarrow f^2(0) + f^2(1) + 9 + 4 - 6f(0) - 4f(1) = 0$

$f^2(0) - 6f(0) + 9 + f^2(1) - 4f(1) + 4 = 0$

$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0}$

$(f(0) - 3)^2 + (f(1) - 2)^2 = 0$

$f(0) - 3 = 0$ και $f(1) - 2 = 0$

$f(0) = 3$ και $f(1) = 2$

ii)

Είναι $0 < 1$ και $f(0) > f(1)$, και αφού f γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα

iii)

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $\dfrac{f(x)}{x} = 3$ στο διάστημα $(0, 1)$

» $f(x) = 3x$ »

» $f(x) - 3x = 0$ »

» $g(x) = 0$ » όπου $g(x) = f(x) - 3x$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$g(0) = f(0) = 3 > 0$ και $g(1) = f(1) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$

Επομένως, με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$

Όμως οι συναρτήσεις f και $-3x$ είναι γνησίως φθίνουσες, άρα και το άθροισμά τους, δηλαδή η g. Επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

iv)

$0 < \dfrac{1}{2} < 1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(0) > f\left(\dfrac{1}{2}\right) > f(1) \Rightarrow 3f(0) > 3f\left(\dfrac{1}{2}\right) > 3f(1)$ **(1)**

$0 < \dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow f(0) > f\left(\dfrac{1}{3}\right) > f(1)$ **(2)**

$0 < \dfrac{1}{4} < 1 \Rightarrow f(0) > f\left(\dfrac{1}{4}\right) > f(1)$ **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $5f(0) > 3f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) > 5f(1)$

$$f(1) < \frac{3f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{5} < f(0)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ με $f(1) \neq f(0)$

και ο αριθμός $\frac{3f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{5}$ είναι μεταξύ των $f(0)$ και $f(1)$, σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \varepsilon (0,\ 1)$ έτσι

ώστε $f(x_2) = \frac{3f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)}{5} \Leftrightarrow 5f(x_2) = 3f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

Επειδή δε η f είναι γνησίως φθίνουσα, το x_2 είναι μοναδικό

v)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι “1 – 1” άρα αντιστρέφεται

$f\left(f^{-1}(x^2-3x+4)-1\right) > 3 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2-3x+4)-1) > f(0)$

$f^{-1}(x^2-3x+4)-1 < 0$ (αφού f γν.φθίνουσα)

$f^{-1}(x^2-3x+4) < 1$

$f(f^{-1}(x^2-3x+4)) > f(1)$ (αφού f γν.φθίνουσα)

$x^2-3x+4 > 2$

$x^2-3x+2 > 0$

$x < 1$ ή $x > 2$

63.

Έστω συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $(f(x))^2 + (g(x))^2 = (x\eta\mu x)^2$

i) Δείξτε ότι **α)** $f(0) = g(0) = 0$

β) Οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $x_o = 0$

ii) Υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)\eta\mu x - xg(x)}{x^2 + \eta\mu^2 x}$

Προτεινόμενη λύση

i) α)

Η σχέση $(f(x))^2 + (g(x))^2 = (x\eta\mu x)^2$ για $x = 0$ δίνει $(f(0))^2 + (g(0))^2 = 0$

$f(0) = 0 = g(0)$

i) β)

$(f(x))^2 + (g(x))^2 = (x\eta\mu x)^2 \Rightarrow (f(x))^2 = (x\eta\mu x)^2 - (g(x))^2$

Και επειδή $(f(x))^2 \geq 0$ θα είναι και $(x\eta\mu x)^2 - (g(x))^2 \geq 0$

$(g(x))^2 \leq (x\eta\mu x)^2$

$|g(x)| \leq |x\eta\mu x|$

$-|x\eta\mu x| \leq g(x) \leq |x\eta\mu x|$

Όμως $\lim\limits_{x \to 0}(x \cdot \eta\mu x) = 0$, άρα $\lim\limits_{x \to 0}\left(-|x \cdot \eta\mu x|\right) = 0 = \lim\limits_{x \to 0}|x \cdot \eta\mu x|$

Οπότε , με βάση το κριτήριο της παρεμβολής , θα είναι και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

Αφού λοιπόν $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$, η g είναι συνεχής στο $x_o = 0$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$

ii)

Για $x \neq 0$, η $(f(x))^2 + (g(x))^2 = (x\eta\mu x)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{g(x)}{x}\right)^2 = (\eta\mu x)^2$

Με τον ίδιο τρόπο , όπως στο (iβ), βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

Είναι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)\eta\mu x - xg(x)}{x^2 + \eta\mu^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{f(x)\eta\mu x}{x^2} - \dfrac{xg(x)}{x^2}}{1 + \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{f(x)}{x} \cdot \dfrac{\eta\mu x}{x} - \dfrac{g(x)}{x}}{1 + \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2} = \frac{0 \cdot 1 - 0}{1 + 1} = 0$$

64.

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$f(x + y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $f(0) \neq 0$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h} = 1$

Δείξτε ότι

i) $f(0) = 1$

ii) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η σχέση $f(x + y) = f(x)f(y)$ **(1)** , για $x = y = 0$ δίνει $f(0) = (f(0))^2$

$f(0) = 1$

ii)

Στην (1) , όπου x, y θέτουμε $\dfrac{x}{2}$: $f(x) = \left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$

Αν υπάρχει κάποιο x_1 έτσι ώστε $f(x_1) = 0$ τότε

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x_1 + (-x_1)) \\ &= f(x_1)f(-x_1) \\ &= 0\cdot f(-x_1) \\ &= 0 \text{ , που είναι άτοπο} \end{aligned}$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii)

Έστω τυχαίο $x_o \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} &\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)f(h)-f(x_o)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o)\left[f(h)-1\right]}{h} \\ &= f(x_o)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h} = f(x_o)\,.\,1 = f(x_o) \end{aligned}$$

Άρα f παραγωγίσιμη στο R και μάλιστα ισχύει $f\,'(x) = f(x)$

65.

Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής με $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

i) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) Να δείξτε ότι $f(1) = 0$

iii) Να βρείτε το $k\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1} & \alpha\nu\ x\neq1\\ \kappa & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$

να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iv) Για $k=1$ να δείξτε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία $y = 2x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο $x_o\in(0, 1)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x-1}\cdot\frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\qquad \textbf{(1)}$$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x-1}$ θέτουμε $\eta\mu x = u$, οπότε $u\to1$ αφού $x\to\dfrac{\pi}{2}$

Επομένως $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x-1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{f(u)}{u-1}=1$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\eta\mu x-1)'}{(\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x}=0$

(1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot0=0$

ii)

f συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής και στο 1 $\Rightarrow$ $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$ **(2)**

Θέτουμε $\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)$, $x\neq1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to1}h(x)=1$ και $f(x)=xh(x)-h(x)$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(xh(x)-h(x))=1\cdot1-1=0$$

Η (2) $\Rightarrow$ $f(1) = 0$

iii)

Για κάθε $x\neq1$ η g είναι συνεχής σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x = 1$,

δηλαδή πρέπει $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\kappa$ $\Leftrightarrow$ $1 = k$

iv)

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)-2x=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - 2x$
Η φ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\varphi(0) = g(0) - 2\cdot 0 = -f(0)$

Όμως $0 < 1$ και f γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ $f(0) < f(1) = 0$

$-f(0) > 0$

$\varphi(0) > 0$

$\varphi(1) = g(1) - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1 < 0$

Επομένως , με βάση το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,\ 1)$ ώστε $\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$g(\xi) - 2\xi = 0$

66.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^3-2x} - 2x$

i) Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 5$ έχει μία μόνο ρίζα , της οποίας να βρείτε το πρόσημο

iv) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

v) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$e^{-x^3-2x} + 2(3x-1) = e^{-(3x-1)^3-2(3x-1)} + 2x$$

vi) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(e^x) \le f(x+1)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (-3x^2-2)e^{-x^3-2x} - 2 < 0$. Άρα είναι γνησίως φθίνουσα και χωρίς ακρότατα

ii)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x^3-2x} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3-2x} - \lim\limits_{x\to+\infty} 2x$

  Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3-2x} = 0$

  Και $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x^3-2x} - 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^3-2x} - \lim\limits_{x\to-\infty} 2x$

  Αλλά $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^3-2x} = +\infty$

  Και $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$

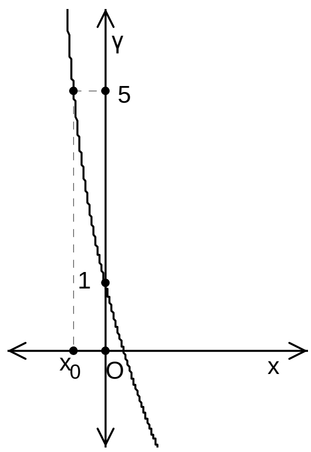
  Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, +\infty)$

iii)

Είναι $f(0) = e^{-0^3-2\cdot 0} = e^0 = 1$

Από (i) και (ii) προκύπτει η πρόχειρη C_f



Επειδή το $5 \in f(A)$ και f γν.φθίνουσα , η εξίσωση $f(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα x_o .

Όταν $x \in (-\infty, 0)$ τότε $f(x) > 1$, και επειδή $5 > 1$, το x_o θα ανήκει στο $(-\infty, 0)$, δηλαδή $x_o < 0$

iv)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα , θα είναι "1 – 1" , άρα αντιστρέφεται

v)

$$e^{-x^3-2x}+2(3x-1) = e^{-(3x-1)^3-2(3x-1)}+2x \quad \Leftrightarrow$$
$$e^{-x^3-2x}-2x = e^{-(3x-1)^3-2(3x-1)}-2(3x-1)$$
$$f(x) = f(3x-1)$$
$$x = 3x-1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

vi)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $e^x \geq x+1$

$$e^x-x-1 \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x-x-1$

Το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		↘	|	↗	

Από τον πίνακα φαίνεται ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $g(0) = 0$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq g(0) \quad \Leftrightarrow \quad e^x-x-1 \geq 0$

67.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $x>0$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

iv) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του (iii) ερωτήματος με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ και ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Προτεινόμενη λύση

i)

- Κατακόρυφες ασύμπτωτες

  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}[(x-2)\ln x+x-3]=(-2)(-\infty)-3=+\infty$

  Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη
- Πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)\ln x+x-3}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(x-2)\ln x+x-3]'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1}{1}=(+\infty)+1+1=+\infty$$

  Άρα δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες

ii)

$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$

Προφανής ρίζα της f' είναι το 1

Και επειδή $f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

- Για $x\in(0, 1] \Rightarrow x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)$

  $f'(x)<0$

  f γν.φθίνουσα στο $(0, 1]$

- Για $x\in(1, +\infty) \Rightarrow x>1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)$

  $f'(x)>0$

  f γν.αύξουσα στο $[1, +\infty)$

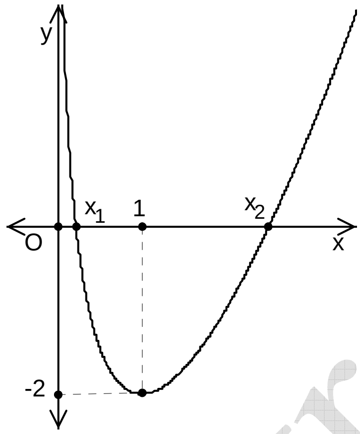
iii)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-2)\ln x+x-3]=(+\infty)(+\infty)+(+\infty)-3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (0-2)(-\infty) + (+\infty) - 3 = +\infty$

$f(1) = (1-2)\ln 1 + 1 - 3 = -2$

Από (ii) και τα παραπάνω προκύπτει πρόχειρη γραφική παράσταση



Το σύνολο τιμών της f είναι δύο φορές το διάστημα $[-2, +\infty)$.

Και επειδή $0 \in [-2, +\infty)$ θα υπάρχουν $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ που είναι ακριβώς δύο ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

iv)

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $xf'(x) - f(x) = 0$

$$f'(x)\,x - f(x)\,x' = 0$$

$$\frac{f'(x)x - f(x)x'}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$$

Πάμε για Rolle στη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

g παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής σαν πηλίκο παραγωγίσιμων

$g(x_1) = \dfrac{f(x_1)}{x_1} = \dfrac{0}{x_1} = 0$ και $g(x_2) = \dfrac{f(x_2)}{x_2} = \dfrac{0}{x_2} = 0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $g'(\xi) = 0$

Η εφαπτομένη στο $M(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί $0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi)$

$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$

που ισχύει

68.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq x$ και $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$. Να αποδείξετε ότι :

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f\,'(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)-x}$

ii) Η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iii) $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$ στο $\mathbb{R}$.

iv) $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ στο $\mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η συνάρτηση $\dfrac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πηλίκο συνεχών $\Rightarrow$

η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

η συνάρτηση $f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Άρα $f\,'(x) = 1 + \dfrac{x}{f(x)-x} = \dfrac{f(x)}{f(x)-x}$

ii)

$$\begin{aligned} g\,'(x) &= 2f(x)f\,'(x) - 2f(x) - 2xf\,'(x) \\ &= 2f\,'(x)\big(f(x) - x\big) - 2f(x) \\ &= 2\frac{f(x)}{f(x)-x}(f(x) - x) - 2f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = c \end{aligned}$$

iii)

$g(x) = c \quad \Rightarrow \quad (f(x))^2 - 2xf(x) = c$ **(1)**

Η υπόθεση $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ για $x = 0$ δίνει $f(0) = 3$

Η (1) για $x = 0$ δίνει $(f(0))^2 - 2\cdot 0\cdot f(0) = c \Rightarrow 3^2 - 0 = c \Rightarrow c = 9$

Η (1) γίνεται $(f(x))^2 - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9$

$$(f(x)-x)^2 = x^2 + 9$$

$$f(x) - x = \pm\sqrt{x^2+9} \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (διαφορά συνεχών) και επειδή $f(x) - x \neq 0$, είναι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Επειδή όμως $h(0) = f(0) = 3 > 0$, θα είναι $h(x) > 0$, δηλαδή $f(x) - x > 0$

Οπότε η (2) $\Rightarrow$ $f(x) - x = \sqrt{x^2+9}$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$$

iv)

Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$. Αρκεί $\int_{\gamma}^{x+1} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x} f(t)dt < \int_{\gamma}^{x+2} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x+1} f(t)dt$

$$\frac{\int_{\gamma}^{x+1} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x} f(t)dt}{(x+1)-x} < \frac{\int_{\gamma}^{x+2} f(t)dt - \int_{\gamma}^{x+1} f(t)dt}{(x+2)-(x+1)} \quad \textbf{(3)}$$

Πάμε για Θ. Μ. Τ στη συνάρτηση $K(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$, $[x+1, x+2]$

Θα υπάρχουν λοιπόν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε

$$K'(\xi_1) = \frac{K(x+1)-K(x)}{(x+1)-x} \quad \text{και} \quad K'(\xi_2) = \frac{K(x+2)-K(x+1)}{(x+2)-(x+1)}$$

Οπότε, από την (3), αρκεί να αποδείξουμε ότι $K'(\xi_1) < K'(\xi_2)$

Και επειδή $\xi_1 < \xi_2$, αρκεί …………… ότι η K' είναι γν.αύξουσα.

δηλαδή ότι $K''(x) > 0$

Είναι $K(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt \Rightarrow K'(x) = f(x)$

$$K'(x) = x + \sqrt{x^2+9}$$

$$K''(x) = f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0$$

69.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$

iii) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες στα σημεία καμπής τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} x f(x)dx$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 + \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$

Όμως $x^2 + x + 1 > 0$ αφού $\Delta = -3 < 0$ και $x^2 + 1 > 0$.

Άρα $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα .

ii)

Η εξίσωση γράφεται $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$

$$2x^2 - 6x + 4 = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln(x^4+1)$$

$$2x^2 - 6x + 4 = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right]$$

$$2x^2 + \ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right] = 6x - 4 + \ln\left[(3x-2)^2+1\right]$$

$$2x^2 + \ln\left[\left(x^2\right)^2+1\right] = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right]$$

$$f(x^2) = f(3x-2) \qquad \textbf{(1)}$$

Και επειδή η f γνησίως αύξουσα , άρα “1 – 1” , η (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 = 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 1$ ή $x = 2$

iii)

Είναι $f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$ και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Πρόσημο της f ΄΄ και κυρτότητα της f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f΄΄		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Η f παρουσιάζει καμπή στις θέσεις $x = -1$ και $x = 1$ και τα σημεία καμπής είναι

$$A(-1\,,\ -2 + \ln 2),\quad B\,(1\,,\, 2 + \ln 2)$$

Οι εφαπτομένες στα σημεία καμπής έχουν εξισώσεις

$y - f(-1) = f\,'(-1)(x + 1)$ και $y - f(1) = f\,'(1)(x - 1)$ $\Leftrightarrow$

$y - (-2 + \ln 2) = x + 1$ και $y - (2 + \ln 2) = 3(x - 1)$ $\Leftrightarrow$

$y = x - 1 + \ln 2$ και $y = 3x - 1 + \ln 2$

Λύνοντας το σύστημά τους βρίσκουμε το σημείο τομής τους $K(0,\ -1 + \ln 2)$ που ανήκει στον άξονα $y'y$.

iv)

$$I = \int_{-1}^{1} x f(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 + x\ln(x^2+1)\right)dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx \qquad \textbf{(2)}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$ θέτουμε $x^2 + 1 = u$ οπότε $du = 2x\,dx$

Όταν $x = -1$, τότε $u = 2$

Όταν $x = 1$, τότε $u = 2$

Άρα $\int_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{2}\ln u\,du = 0$ και αντικατάσταση στη (2)

70.

Έστω συνάρτηση $f:(0, +\infty)\to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$f(xy) = x^2f(y) + y^2f(x)$ για κάθε $x, y\in \mathbb{R}$ και $f\,'(1) =1$.

i) Δείξτε ότι $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\dfrac{2f(x)}{x}+x$

ii) Δείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $x^2f\,'(x) = 2xf(x) + x^3$

iii) Ο τύπος της f είναι ο $f(x) = x^2\ln x$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f τον x΄x και τις ευθείες $x =1$ και $x = e$.

Λύση

i) Από την δοσμένη συναρτησιακή σχέση για $y = h$ έχουμε

$f(xh) = x^2f(h) + h^2f(x)$

Επίσης για $x = h = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$$\lim_{h\to 1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\lim_{h\to 1}\frac{x^2f(h)+h^2f(x)-f(x)}{xh-x}=$$

$$=\lim_{h\to 1}\frac{x^2f(h)+f(x)(h^2-1)}{x(h-1)}=\lim_{h\to 1}\left(\frac{x^2f(h)}{x(h-1)}+\frac{f(x)(h-1)(h+1)}{x(h-1)}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 1}\left(\frac{xf(h)}{h-1}+\frac{f(x)(h+1)}{x}\right)$$

Όμως $f\,'(1) =1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

οπότε

$$\lim_{h\to 1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\lim_{h\to 1}\left(\frac{xf(h)}{h-1}+\frac{f(x)(h+1)}{x}\right)=$$

$$=x\lim_{h\to 1}\frac{f(h)}{h-1}+\frac{f(x)}{x}\lim_{h\to 1}(h+1)=$$

$$=x+2\frac{f(x)}{x}$$

ii) Έστω $x_o > 0$ τότε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{f\left(\frac{x}{x_o}x_o\right)-f(x_o)}{x-x_o}=\text{λόγω της συναρτησιακής σχέσης}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{\left(\frac{x}{x_o}\right)^2f(x_o)+x_o^2f\left(\frac{x}{x_o}\right)-f(x_o)}{x-x_o}=$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f(x_o)\left[\left(\frac{x}{x_o}\right)^2 - 1\right] + x_o^2 f\left(\frac{x}{x_o}\right)}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left(\frac{f(x_o)\left[\left(\frac{x}{x_o}\right)^2 - 1\right]}{x - x_o} + \frac{x_o^2 f\left(\frac{x}{x_o}\right)}{x - x_o} \right)$$

Θέτω $\frac{x}{x_0} = h$ οπότε $x = hx_o$ και όταν $x \to x_o$ τότε $h \to 1$

Οπότε το παραπάανω όριο γίνεται

$$= \lim_{h\to 1} \left(\frac{f(x_o)\left(h^2 - 1\right)}{hx_o - x_o} + \frac{x_o^2 f(h)}{hx_o - x_o} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 1} \left(\frac{f(x_o)(h-1)(h+1)}{x_o(h-1)} + \frac{x_o^2 f(h)}{x_o(h-1)} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 1} \left(\frac{f(x_o)(h+1)}{x_o} \right) + \lim_{h\to 1} \left(\frac{x_o f(h)}{h-1} \right) =$$

$$= \frac{f(x_o)}{x_o} \lim_{h\to 1}(h+1) + x_o \lim_{h\to 1} \frac{f(h)}{h-1} = 2\frac{f(x_o)}{x_o} + x_o .$$

Οπότε

$f\,'(x_o) = 2\frac{f(x_o)}{x_o} + x_o$.

επειδή το x_o είναι τυχαίο σημείο του $(0 , + \infty)$

έχουμε

$f\,'(x) = 2\frac{f(x)}{x} + x$ άρα η f παραγωγίζεται στο $(0, + \infty)$ και ισχύει

$x^2 f\,'(x) = 2xf(x) + x^3$

iii) $x^2 f\,'(x) = 2xf(x) + x^3 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 f\,'(x) - 2xf(x) = x^3 \quad \Leftrightarrow$

$\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = (\ln x)' \quad \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c \quad \text{για } x = 1 \text{ έχουμε}$$

$f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$ οπότε

$f(x) = x^2 \ln x$

iv) Επειδή η f είναι συνεχής στο [1, e] και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,\ e]$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E = \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1+2e^3}{9} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$